Rakenteiset päättelyketjut ja avoin lähdekoodi

Mia Peltomäki

Kupittaan lukio ja Turun yliopiston IT-laitos
http://crest.abo.fi /Imped

Virtuaalikoulupäivät

24. marraskuuta 2009

Taustaa

- Todistukset muodostavat matematiikan ytimen
- Todistuksen kanssa matemaattinen lause on selvä - ilman todistusta se on taikatemppu
- Todistamisessa voidaan harjoitella asioiden esittämistä formaalisti
- Lukiomatematiikan opetuksessa todistusten käyttö on vähentynyt
- Vaatimukset eivät ole vähentyneet

Opetussuunnitelmat (pitkä matematiikka):

OPS 1974

- matematiikan loogiseen ja abstraktiin rakenteeseen tutustuminen
- kiinnitetään enemmän huomiota asioiden perusteluihin sekä esityksen täsmällisyyteen
- käytössä loogiset konnektiivit ja kvanttorit

OPS 1985

- formaalit ja symboliset esitystavat hylätään liian abstrakteina

OPS 2003

- ymmärtää käyttää matematiikan kieltä: pystyy seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, oppii arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä
- oppii näkemään matemaattisen tiedon luonteeltaan mielekkäänä loogisena rakenteena
- osaa käyttää tarkoituksenmukaisia matemaattisia menetelmiä
- harjaantuu käsittelemään tietoa matematiikalle ominaisella tavalla
- tottuu tekemään otaksumia, tutkimaan niiden oikeellisuutta ja laatimaan perusteluja
- sekä arvioimaan perustelujen pätevyyttä ja tulosten yleistettävyyttä

MUTTA

loogiset konnektiivit ja kvanttorit esitellään vain valinnaisella kurssilla

Rakenteiset päättelyketjut

Laskennalliset päättelyketjut (calculational derivations) on todistusnotaatio, jota on käytetty viimeiset 20 vuotta ohjelmointimenetelmien tutkimusalueella

- Menetelmän kehittivät E.W. Dijkstra ja hänen kolleegansa (Wim Feijen, Nettie van Gasteren, ym).

Rakenteiset päättelyketjut (structured derivations) on tämän jatkokehitys

- Menetelmän ovat kehittäneet Ralph-Johan Back ja Joakim von Wright (Åbo Akademi)
- Uusia piirteitä ovat osapäättelyketjut, havainnot, oletusten käyttöä todistuksissa, taaksepäin ketjuttavat todistukset, ym
- Rakenteiset päättelyketjut muodostavat täydellisen loogisen todistussysteemin,.

Rakenteisten päättelyketjujen ominaisuudet

- Yhtenäinen logiikkaan perustuva notaatio
- Yhtenäinen käsitteellinen perusta matemaattisille päättelyille
- Täsmällinen muoto todistusten kirjoittamiselle
- Menetelmää on helppo tukea tietokoneella ja verkko-opetuksella
- Todistukset voidaan tarpeen mukaan esittää eri tarkkuustasoilla
- Menetelmä soveltuu matematiikan opetukseen eri tasoilla: yläkoulusta yliopistoon

Logiikka koulumatematiikassa

Tarkastellaan esimerkiksi yhtälön $2x + 3 = 5$ ratkaisemista.

Yhtälön ratkaisu

$$
\begin{array}{ll}
\bullet & 2x + 3 = 5 \\
\Leftrightarrow & \{\text{vähennetään 3 puolittain}\} \\
 & 2x = 2 \\
\Leftrightarrow & \{\text{jaetaan 2:lla }\} \\
 & x = 1
\end{array}
$$

Tämä on esimerkki rakenteisesta päättelyketjusta.

- Yhtälö on looginen väite muuttujan x arvosta
- Ekvivalenssi eri väitteiden välillä kirjoitetaan eksplisiittisesti
- Perustelu kirjoitetaan aaltosuluissa omalle rivilleen ekvivalenssisymbolin viereen
- Transitiivisuus antaa lopputuloksen

$$2x + 3 = 5 \Leftrightarrow x = 1$$

- Viimeinen väite on ratkaisu, koska se on kirjoitettu sievennettyyn muotoon, josta voidaan suoraan nähdä x.n arvo.
- Yhtälön ratkaiseminen on pohjimmiltaan sieventämistä.

Päättely totuusarvoilla 1

Otamme käyttöön totuusarvot T (tosi) ja E (epätosi).

• $2x + 3 = 2x$

$\Leftrightarrow$ $\{$vähennetään puolittain $2x\}$

$3 = 0$

$\Leftrightarrow$ $\{$eri kokonaisluvut$\}$

E

Yhtälö on epätosi kaikilla x arvoilla (“yhtälöllä ei ole ratkaisua”)

Päättely totuusarvoilla 2

$\bullet$ $\quad 2x = 2(x+1) - 2$

$\Leftrightarrow$ $\quad$ {sievennetään oikea puoli}

$\quad 2x = 2x$

$\Leftrightarrow$ $\quad$ {aina tosi}

$\quad T$

Yhtälö on tosi kaikilla arvoilla x (“yhtälöllä on äärettömän monta ratkaisua”)

Yhtälön ratkaiseminen

Yhtälön ratkaiseminen noudattaa yksinkertaista kaavaa:

- Alkuperäistä lauseketta muokataan käyttämällä ekvivalenssin säilyttäviä muunnoksia
- Yritetään saada yhtälö mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon
- Lausekkeet muotoa $x = 5$, E ja T ovat tarpeeksi yksinkertaisia, ne näyttävät ratkaisun

Toisen asteen yhtälö

$\bullet \quad x(x-2) = 3(x-2)$

$\Leftrightarrow \quad$ {vähennetään puolittain $3(x-2)$}

$\quad x(x-2) - 3(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad$ {yhteisen tekijän erottaminen}

$\quad (x-3)(x-2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad$ {tulon nollasääntö: $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$}

$\quad x - 3 = 0 \vee x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad$ {lisätään puolittain 3 vasemman- ja 2 oikeanpuoleisessa yhtälössä}

$\quad x = 3 \vee x = 2$

$\square$

- Alkuperäinen yhtälö on ekvivalentti loogisen lausekkeen $x = 3 \vee x = 2$ kanssa, ts muuttujan x arvo on joko 3 tai 2 .Yhtälöllä on siis kaksi ratkaisua
- Disjunktion ($\vee$) käyttö päättelyketjussa mahdollistaa sen, että molemmat tilanteet käsitellään samaan aikaan. Jos nämä tilanteet käsitellään erikseen, voi jäädä epävarmaksi, mikä on näiden kahden ratkaisun keskinäinen suhde.
- Käyttämällä loogisia konnektiiveja selkeästi vältämme myös eri notaatioihin liittyvän epämääräisyyden; parempi kirjoittaa

  $$x = 1 \vee x = 3$$

  kuin

  $$x = 2 \pm 1 \qquad \text{tai} \qquad x_1{=}1{,}x_2{=}3$$

Kolmannen asteen yhtälö

$\bullet$ $(x-1)(x^2+1)=0$

$\Leftrightarrow$ {tulon nollasääntö}

$x-1=0 \vee x^2+1=0$

$\Leftrightarrow$ {lisätään puolittain 1 vasemman- ja -1 oikeanpuoleisessa yhtälössä}

$x=1 \vee x^2=-1$

$\Leftrightarrow$ {neliö ei ole koskaan negatiivinen}

$x=1 \vee E$

$\Leftrightarrow$ {disjunktion ominaisuus}

$x=1$

$\square$

Rakenteisten päättelyketjujen etuja

- Opettajan on helpompi rakentaa ja selittää päättelyjä luokassa, kun perusteluille on varattu oma paikkansa todistuksessa
- Opiskelijan on helpompi ymmärtää päättelyketjuja oppitunnin jälkeen, kun hän ryhtyy ratkaisemaan kotitehtäviään
- Sekä opettajan että opiskelijan on helpompi tarkistaa tehtävän ratkaisu ja löytää virheet päättelyssä
- Opettajan on helpompi antaa arvosanoja ratkaisuista, koska näkee, miten pitkälle opiskelija on päässyt ja miten perustellut todistusaskeleensa

Alipäättelyketju

Todistukseen kuuluvaa päättelyaskelta voidaan perustella omalla erillisellä päättelyketjulla.

Vaihtoehtoisesti voimme antaa tämän perustelun osana käynnissä olevaa päättelyä, alipäättelynä:

- Alipäättely sisennetään oikealle
- Se kirjoitetaan heti perustelun jälkeen
- Alipäättelyn loppuminen merkitään symbolilla " ..."

Esimerkki: minimointiongelma

$\bullet$ Milloin $x^2 - x - 6$ saavuttaa pienimmän arvonsa

$\Vdash$ $x^2 - x - 6$ saavuttaa pienimmän arvonsa

$\Leftrightarrow$ {kirjoitetaan neliömuotoon}

- $\bullet$ $x^2 - x - 6$
- $=$ {täydennetään neliöt}
- $x^2 - x + \frac{1}{4} - 6 - \frac{1}{4}$
- $=$ {ryhmitellään}
- $(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4}$

$\ldots$ $(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4}$ saavuttaa pienimmän arvonsa

$\Leftrightarrow$ {vakiot eivät vaikuta minimin paikkaan}

$(x - \frac{1}{2})^2$ saavuttaa pienimmän arvonsa

$\Leftrightarrow$ {neliön pienin arvo on 0}

$x - \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow$ {lisätään puolittain $\frac{1}{2}$}

$x = \frac{1}{2}$

Alipäättely voidaan *piilottaa*. Silloin "..." merkki ilmoittaa että on olemassa piilotettu alipäättely.

$\bullet$	Milloin $x^2 - x - 6$ saavuttaa pienimmän arvonsa
$\Vdash$	$x^2 - x - 6$ saavuttaa pienimmän arvonsa
$\Leftrightarrow$	$\{$kirjoitetaan neliömuotoon$\}$
$\ldots$	$(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{25}{4}$ saavuttaa pienimmän arvonsa
$\Leftrightarrow$	$\{$vakiot eivät vaikuta minimin paikkaan$\}$
	$(x - \frac{1}{2})^2$ saavuttaa pienimmän arvonsa
$\Leftrightarrow$	$\{$neliön pienin arvo on $0\}$
	$x - \frac{1}{2} = 0$
$\Leftrightarrow$	$\{$lisätään puolittain $\frac{1}{2}\}$
	$x = \frac{1}{2}$

Tehtävä ja oletukset

Ennen tehtävän ratkaisemista on usein syytä analysoida tehtävä tarkemmin.

Rakenteinen päättelyketju voidaan aloittaa

- kirjoittamalla tehtävä eksplisiittisesti ja
- luettelemalla oletukset, joita voidaan käyttää tehtävän ratkaisemisessa

Havaintojen käyttö todistuksissa

- Kun päättelyketjuihin kirjoitetaan oletuksia, voidaan usein samalla tehdä havaintoja, jotka seuraavat enemmän tai vähemmän suoraan oletuksista.
- Havainnolla pitää aina myös olla perustelu. Perustelu on samaa muotoa kuin perustelut todistusketjun todistusaskeleessa.
- Perustelu voi olla yksinkertainen tai perustelu voidaan tehdä alipäättelyn avulla. Havainnot voidaan numeroida samaan tapaan kuin oletukset.

Rakenteisissa päättelyketjuissa voidaan myös käyttää lisämateriaalia kuten

- kuvioita,
- taulukoita tai
- muita apuvälineitä.

Lisämateriaali esitellään todistuksen ulkopuolella, mutta siihen voidaan viitata päättelyketjussa.

Esimerkki: analyyttinen geometria

Määritä se paraabelin $y = x^2 - 2x - 3$ piste, jossa tangentin suuntakulma on $+45°$.

Ongelma muotoillaan uudelleen seuraavasti nimeämällä tarvittavat suureet:

Määritä se paraabelin $y = x^2 - 2x - 3$ piste (x, y), jossa tangentin suuntakulma α on $+45°$.

- Määritä piste (x, y), silloin kun

[a] $y = f(x) = x^2 - 2x - 3$ ja

[b] paraabelin tangentilla on pisteessä (x, y) suuntakulma $\alpha = 45°$

[1] $f'(x) = 1$

{todistus}

- paraabelin tangentilla on pisteessä (x, y) suuntakulma $45°$

$\Leftrightarrow$ {kulmakerroin k saadaan suuntakulmasta α kaavalla $k = \tan\alpha$}

tangentin kulmakerroin pisteessä (x, y) on $\tan 45°$

$\Leftrightarrow$ $\{\tan 45° = 1\}$

tangentin kulmakerroin pisteessä (x, y) on 1

$\Leftrightarrow$ {kulmakerroin saadaan funktion derivaatasta}

$f'(x) = 1$

$\Vdash$ (x, y)

$=$ {määrätään muuttujan x arvo, havainto [1]}

- $f'(x) = 1$

$$
\begin{array}{lll}
 & \Leftrightarrow & \{\text{oletus } [a]\text{, lasketaan derivaatta}\} \\
 & & 2x - 2 = 1 \\
 & \Leftrightarrow & \{\text{ratkaistaan } x\} \\
 & & x = \frac{3}{2}
\end{array}
$$

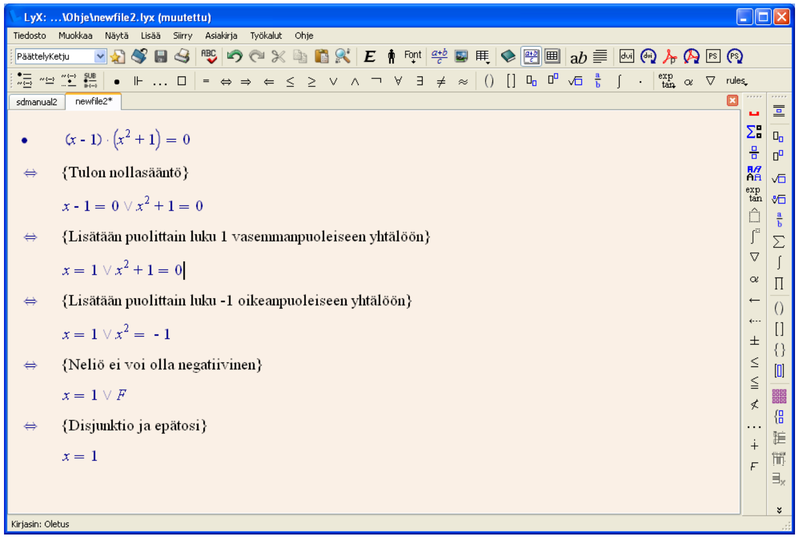
$$
\begin{array}{ll}
\ldots & \left(\frac{3}{2}, y\right) \\
= & \{\text{määrätään muuttujan } y \text{ arvo oletuksen } [a] \text{ avulla}\} \\
 & \left(\frac{3}{2}, \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) - 3\right) \\
= & \{\text{lasketaan}\} \\
 & \left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}\right)
\end{array}
$$

LYX-editori

http://www.lyx.org

LyX-editorin kotisivu

- LYX-editori matemaattiseen kirjoittamiseen
- avoimen lähdekoodin ohjelma
- rakennettu lisäosa rakenteisten päättelyketjujen kirjoittamiseen: Petri Sallasmaa ja Teemu rajala SD-LYX (sd = structured derivations)
- esimerkki alla SD-LYX editorista



Toimintaa:

IMPEd resurssikeskus

- materiaalin valmistus (tuki Teknologiateollisuuden 100-vuotissäätiö)
- opettajien koulutus (tuki OPH)

MATO-projekti

- lukio, yläkoulu
- matemaattinen kirjoittaminen
- OPH:n oppimisympäristöhanke

OPTEK

- yläkoulu
- TVT-tekniikka koulun arjessa
- TEKES-projekti

Lisätietoja:

http://crest.abo.fi/imped

mia.peltomaki@utu.fi

ralph-johan.back@abo.fi

petri.sallasmaa@utu.fi